

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1968-002

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. M. Euwe

24 januari 1968

De Pivot Procedure

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt" luidt de algemene titel van deze reeks voordrachten. Ik ben er niet zeker van dat dit onderwerp volledig voldoet aan de gestelde eisen, maar wèl betreft het een onderwerp dat een algemene interpretatie toelaat met mogelijkheden van toepassing op een groot aantal gebieden.

I. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = z_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = z_2 \end{cases}$ Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden x_1 en x_2 .

Oplossing volgens de substitutie-methode komt neer op vervanging van dit stel vergelijkingen door twee nieuwe:

$$\begin{cases} x_1 = 1/a_{11}z_1 - a_{12}/a_{11}x_2 \\ z_2 = a_{21}/a_{11}z_1 + (a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11})x_2 \end{cases}$$

Wanneer wij in het eerste stel vergelijkingen x_1 en x_2 beschouwen als afhankelijk veranderlijken, z_1 en z_2 als onafhankelijk veranderlijken, dan zijn in het tweede stel vergelijkingen de rollen van x_1 en z_1 verwisseld: z_1 is nu afhankelijk veranderlijk en x_1 onafhankelijk veranderlijk.

Wij schrijven dit symbolisch in matrix vorm

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cc}
 & x_1 & x_2 \\
 \begin{array}{l} z_1 = \\ z_2 = \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array} & \Rightarrow & \begin{array}{cc}
 & z_1 & x_2 \\
 \begin{array}{l} x_1 = \\ z_2 = \end{array} & \begin{array}{|cc|} \hline 1/a_{11} & -a_{12}/a_{11} \\ \hline a_{21}/a_{11} & a_{22} - a_{12}a_{21}/a_{11} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Dit noemen wij de pivot procedure of verwisselprocedure (draaiprocedure); a_{11} heet het pivot element (of spil).

De transformatieregels luiden (algemeen geformuleerd):

- (1) Het pivot-element neemt de reciproke waarde aan ($1/a_{11}$);
- (2) De elementen van de pivot-kolom worden gedeeld door het pivot-element;
- (3) De elementen van de pivot-rij worden gedeeld door het tegengestelde van het pivot-element;
- (4) Voor de overige elementen geldt de z.g. rechthoeksregel:
op het pivot-element p (hier a_{11}) en het te transformeren element t (hier a_{22}) wordt binnen de matrix een rechthoek beschreven, waarvan p en t overstaande hoekpunten zijn; de andere hoekpunten zijn h_1 en h_2 ; het element t gaat dan over in $t - (h_1 h_2 / p)$.

Deze regels zijn algemeen en gelden ook voor niet-vierkante matrices. De bewijzen worden op eenvoudige manier geleverd door rechtstreekse berekening.

Een drietal opmerkingen:

- (1) het pivot-element mag niet 0 zijn. Voorts komt de nauwkeurigheid in gevaar, wanneer de absolute waarde van het pivot-element relatief klein is.
- (2) vaak wordt de pivot-procedure anders toegepast:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = z_1$ wordt vervangen door $0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - z_1$ enz. De matrix wordt dan

$$\begin{array}{l} y_1 = \\ y_2 = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & x_1 & x_2 & 1 \\ \hline & a_{11} & a_{12} & -z_1 \\ \hline & a_{21} & a_{22} & -z_2 \\ \hline \end{array}$$

Men manipuleert nu op dezelfde wijze met y_1 en y_2 (als tevoren met z_1 en z_2) maar stelt dan tenslotte $y_1 = y_2 = 0$.

- (3) Er is nog een tweede schrijfwijze in gebruik, de z.g. getransponeerde schrijfwijze.

Wij nemen als voorbeeld:

$$\begin{cases} z_1 = 4x_1 + 6x_2 - x_3 \\ z_2 = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

Gewone schrijfwijze:

	x_1	x_2	x_3
$z_1 =$	4	6	-1
$z_2 =$	2	2	5

Getransformeerde schrijfwijze:

	$\underline{\underline{z_1}}$	$\underline{\underline{z_2}}$
$-x_1$	-4	-2
$-x_2$	-6	(-2)
$-x_3$	1	-5

De " = " - tekens staan boven de matrix. De betekenis is precies dezelfde. De "min" - tekens voor x_1 , x_2 en x_3 dienen om de transformatieregels onveranderd te laten.

Wij passen de pivot procedure toe op het (omkringde) snijpunt-element van x_2 en z_2 . Dit geeft:

	<u><u>z₁</u></u>	<u><u>x₂</u></u>
-x ₁	2	1
-z ₂	-3	- $\frac{1}{2}$
-x ₃	16	5/2

(De "min" - tekens gaan bij de verwisseling niet mee)

Aldus wordt het stelsel

$$\begin{cases} z_1 = 4x_1 + 6x_2 - x_3 \\ z_2 = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{cases} \text{ getransformeerd in: } \begin{cases} z_1 = -2x_1 + 3z_2 - 16x_3 \\ x_2 = -x_1 + \frac{1}{2}z_2 - 5/2x_3 \end{cases}$$

Lezen wij de getransponeerde schrijfwijze evenwel als gewone schrijfwijze (zelfde matrix, dus ook dezelfde getransformeerde matrix), dan is het stelsel:

$$\begin{cases} x_1 = -4z_1 - 2z_2 \\ x_2 = -6z_1 - 2z_2 \\ x_3 = z_1 - 5z_2 \end{cases} \text{ overgegaan in: } \begin{cases} x_1 = 2z_1 + x_2 \\ z_2 = -3z_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 16z_1 + 5/2x_2 \end{cases}$$

Door één pivot procedure worden twee geheel verschillende stelsels van betrekkingen getransformeerd. Men noemt dit het dualiteitsbeginsel.

II. Toepassing op het inverteren van matrices

Voorbeeld

	x ₁	x ₂	x ₃
z ₁ =	③	5	1
z ₂ =	2	4	5
z ₃ =	1	2	2

Wanneer de pivot procedure driemaal wordt toegepast zodanig dat alle links-variabelen worden verwisseld met de boven variabelen, dan hebben wij de matrix geïnterveerd. Wij nemen als pivot elementen achtereenvolgens de (omkringde) elementen van de diagonaal en krijgen

	z_1	x_2	x_3	$\Rightarrow$	z_1	z_2	x_3	$\Rightarrow$	z_1	z_2	z_3	
$x_1 =$	1/3	-5/3	-1/3		$x_1 =$	2	-5/2	21/2	$x_1 =$	2	8	-21
$z_2 =$	2/3	(2/3)	13/3		$x_2 =$	-1	3/2	-13/2	$x_2 =$	-1	-5	13
$z_3 =$	1/3	1/3	5/3		$z_3 =$	0	1/2	(-1/2)	$x_3 =$	0	1	-2

Wij hebben in dit voorbeeld een vaste route gevolgd (de diagonaal) maar dit is niet altijd mogelijk omdat het pivot element niet 0 mag zijn. Soms heeft men geen keuze, bijv. bij de laatste transformatie, dan is het pivot element voorgeschreven; was in de voorlaatste matrix het rechterhoek-element nul geweest, dan had dit betekend dat de oorspronkelijke matrix singulier is.

Echter stuit ook het werken met kleine pivot elementen op bezwaren die door dr. T.J. Dekker zijn behandeld in zijn voordracht voor het Mathematisch Centrum op 28 september 1966. Dr. Dekker spreekt van partiële pivoting wanneer de rijen worden omgewisseld en van volledige pivoting, wanneer de volgorde van zowel rijen als kolommen wijziging ondergaat.

III. Toepassing op het oplossen van lineaire vergelijkingen (methode van Gauss).

Voorbeeld

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 14 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Wij volgen de onder} \\ \text{I bij opmerking (2)} \\ \text{aangegeven methode} \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	1	$\Rightarrow$	z_1	x_2	x_3	x_4	1	
$z_1 =$	①	-1	-2	3	-1		$x_1 =$	1	1	2	-3	1
$z_2 =$	2	-3	1	2	-14		$z_2 =$	2	-1	5	-4	-12
$z_3 =$	3	-1	-2	-1	1		$z_3 =$	3	2	4	-10	4
$z_4 =$	1	1	1	1	-9		$z_4 =$	1	2	3	-2	-8

Daar $z_1 = 0$ kan de eerste kolom vervallen. De betekenis van de eerste rij luidt: $x_1 = x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 1$. Deze doet alleen dienst voor de berekening van x_1 als wij x_2 , x_3 en x_4 hebben gevonden en speelt geen rol bij de verdere berekening. Wij laten daarom de eerste rij ook achterwege en houden over:

	x_2	x_3	x_4	1
$z_2 =$	-1	5	-4	-12
$z_3 =$	2	4	-10	4
$z_4 =$	2	3	-2	-8

Wij herhalen de procedure maar laten nu onmiddellijk het overbodige weg

	x_3	x_4	1
$z_3 =$	14	-18	-20
$z_4 =$	13	-10	-32

met

$$x_2 = 5x_3 - 4x_4 - 12$$

Nog een keer dezelfde procedure

	x_4	1
$z_4 =$	$47/7$	$-94/7$

$$\text{met } x_3 = 9/7x_4 + 10/7$$

$$0 = 47/7x_4 - 94/7 \rightarrow x_4 = 2$$

$$\text{Voortw } x_3 = 4; \quad x_2 = 0; \quad x_1 = 3.$$

Wanneer de nauwkeurigheid van de uitkomst in het geding komt, is het van belang te wijzen op de volgende iteratie procedure:

$$[A](x) = (b).$$

Wij vinden in eerste instantie (x_0) en substitueren.

$$[A](x_0) = (c) \quad \text{Aftrekking geeft:}$$

$$[A](x-x_0) = (b-c) \quad \text{Stel } x-x_0 = \Delta x \text{ en los } \Delta x \text{ op, waarbij valt op}$$

te merken dat de matrix A voor dit nieuwe stel vergelijkingen dezelfde is als voor het oorspronkelijke stel vergelijkingen.

Met de nieuwe gevonden oplossing $(x+\Delta x)$, kan men op dezelfde wijze te werk gaan en deze procedure kan worden herhaald totdat een tevoren vastgestelde graad van nauwkeurigheid is bereikt. In dit verband wijst dr. T.J. Dekker in de reeds geciteerde voordracht op een andere oplossingsmethode welke begint met de ontbinding van de matrix A in twee matrices. De ene matrix is bovendriehoeks, de andere matrix is onderdriehoeks met diagonaal-elementen 1.

IV. Toepassing op Lineaire Programmering.

Onder lineaire programmering (of optimalisering) wordt verstaan: het bepalen van extremen van lineaire functies, wanneer de variabelen moeten voldoen aan één of meer lineaire bijvoorwaarden in de vorm van vergelijkingen of ongelijkheden.

Een voorbeeld.

Een landbouwer heeft 100 ha land, waarop hij aardappelen of graan kan verbouwen of niets.

Gegevens:

De kosten bedragen voor aardappelen f 10,- per ha, voor graan f 20,- per ha. Het aantal werkdagen is resp 1 en 4 per ha. De opbrengst is resp. f 40,- en f 120,- per ha.

Totaal beschikbaar zijn f 1100,- en 160 werkdagen. Als x_1 en x_2 de aantallen ha. aardappelen en graan voorstellen is dus gegeven:

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \leq 1100 \\ x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Gevraagd wordt: voor welke combinatie (x_1, x_2) is de opbrengst (z) maximaal?

$$z = 40x_1 + 120x_2$$

Schrijven wij de gegevens in matrix vorm met invoering van residu-variabelen y_1, y_2, y_3 , dan komt de oplossing neer op de uitvoering van een aantal pivot-procedures.

	x_1	x_2	1
$y_1 =$	-10	-20	1100
$y_2 =$	-1	$\textcircled{-4}$	160
$y_3 =$	-1	-1	100
$z =$	40	120	0

Om het doel te bereiken moeten wij de volgende regels in acht nemen.

- (1) Als pivot-kolom kiezen we die kolom die in de laatste rij een positief getal heeft. (Bij voorkeur het grootste).
- (2) Het pivotelement moet negatief zijn; bij keuze moeten wij dat element nemen waarvoor het karakteristiek quotiënt (definitie volgt) het grootst is.
- (3) Wij zetten de procedure zolang voort totdat de z-rij geen enkel positief element meer telt (afgezien van het rechter hoek-element).

Door toepassing van deze regels zullen de getallen van de laatste kolom non-negatief blijven (dit is gemakkelijk te bewijzen) en zal het rechter hoek-element (de winst) steeds groter worden.

Nu de uitvoering.

Wij kiezen de tweede kolom als pivotkolom ($120 > 40$). Vervolgens berekenen wij de karakteristieke quotiënten, waaronder te verstaan is de quotiënten van de elementen van de 3e kolom en de overeenkomstige elementen van de 2e kolom - alleen de negatieve doen mee.

Dit geeft achtereenvolgens $1100 : -20 = -55$; $160 : -4 = -40$;

$100 : -1 = -100$. Het grootste quotiënt is -40 , het pivotelement is dus -4 .

Wij pivoteren:

	x_1	x_2	1
$y_1 =$	$\textcircled{-5}$	5	300
$x_2 =$	$-1/4$	$-1/4$	40
$y_3 =$	$-3/4$	$1/4$	60
$z =$	10	-30	4800

Nog eenmaal de pivot-procedure met inachtneming van dezelfde regels (het pivot-element is omringd)

	y_1	y_2	1
$x_1 =$	-1/5	1	60
$x_2 =$	1/20	$-\frac{1}{2}$	25
$y_3 =$	3/20	$-\frac{1}{2}$	15
$z =$	-2	-20	5400

De laatste rij is negatief. Wij zijn klaar. De maximale waarde $z = 5400$ wordt bereikt voor $y_1 = 0$ en $y_2 = 0$. Daaruit volgt verder $x_1 = 60$, $x_2 = 25$, $y_3 = 15$. In woorden: de opbrengst = f 5400,-, voor 60 ha. aard-appelen, 25 ha. graan terwijl 15 ha. leeg blijft.

Deze oplossingsmethode gaat slechts volledig op, wanneer in de oorspronkelijke opgave de elementen van de laatste kolom niet negatief zijn (en derhalve zo blijven). Immers alleen in dit geval voldoet de oplossing aan de ongelijkheden $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$.

Wij zullen ons hier niet bezig houden met vraagstukken, die leiden tot matrices met wel negatieve elementen in de laatste kolom. Aan de eigenlijke pivotage gaan dan een of meer lineaire substituties vooraf, die de negatieve elementen verdrijven. Meetkundig gezien komen deze substituties neer op een translatie van het assenstelsel. Daarbij blijft uiteraard de mogelijkheid bestaan dat de ongelijkheden onderling strijdig zijn, zodat het vraagstuk geen enkele oplossing heeft. Voorts kunnen ook de normale gevallen (geen negatieve elementen in de laatste kolom) aanleiding geven tot bijzonderheden, zoals meer gelijkwaardige oplossingen, maximum oneindig groot dus in feite geen maximum e.d.

V. Toepassing op transportproblemen

Bij transportproblemen wordt gevraagd naar de optimalisering van een complex van transportopdrachten, die op verschillende wijzen kunnen worden uitgevoerd. Bij voorbeeld in deze zin dat de gereden kilometers resp. de transportkosten minimaal moeten uitvallen. Doorgaans wordt het probleem gepresenteerd in de vorm van 2 matrices, de transportma-

trix en de kostenmatrix.

		filialen			
magazijnen	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	27
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	15
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	12
	30	4	15	5	54

De betekenis van deze transportmatrix luidt (bijv.) als volgt. Een bedrijf beschikt over drie magazijnen die resp. 27, 15 en 12 eenheden van een bepaald goed bevatten. Deze goederen moeten worden geleverd aan 4 filialen en wel 30 aan het eerste filiaal, 4 aan het tweede, 15 aan het derde en 5 aan het vierde filiaal.

x_{11} stelt nu voor hoeveel magazijn 1 levert aan winkel 1, x_{12} de levering van magazijn 1 aan winkel 2, x_{33} de levering van magazijn 3 aan winkel 3 enz.

Thans de kostenmatrix.

	filialen			
magazijnen	1	2	1	1
	2	1	2	3
	2	1	1	2

De betekenis van deze matrix is: de transportkosten van magazijn 1 aan winkel 1 bedragen 1 eenheid, van magazijn 1 aan winkel 2 bedragen 2 eenheden, van 1 aan 3 1 eenheid, van magazijn 2 aan winkel 4 3 eenheden enz.

De vraag is nu de x_{11} t/m x_{34} zo te bepalen dat de kosten minimaal worden.

We hebben dus te doen met het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = & 27 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = & 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = & 12 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} & = & 4 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = & 15 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 5 \end{array} \right.$$

Wegens de onderlinge afhankelijkheid kan er van deze 7 vergelijkingen één vervallen. Voorts $x_{11} \geq 0$; $x_{12} \geq 0$ enz.

Voor welke waarden der onbekenden wordt de kostenfunctie

$$K = x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + x_{33} + 2x_{34} \text{ minimaal?}$$

Wij zouden dit vraagstuk door voortdurende pivotage van een 7 bij 13-matrix kunnen oplossen. (7 = aantal vergelijkingen plus de transportfunctie; 13 = aantal onbekenden + 1). De uitvoering daarvan betekent nogal een karwei en de praktijk kent dan ook verschillende methoden, die sneller tot het doel leiden. Wij behandelen daarvan die methode, welke het dichtst staat bij de methode der pivotage en die door Prof.dr. L. Kosten (Delft) werd belicht in een publicatie "Inverse matrix technique for solving the transportation problem" (Uitgave Math. Inst. van de T.H. te Delft 1963).

Voor het gegeven voorbeeld met 3 rijen en 4 kolommen komen de verschillen met de gewone pivotage nog niet zo tot hun recht, maar bij toenemend aantal variabelen komt de reductie neer op een aanzienlijke vermindering van afzonderlijke berekeningen (in de orde van grootte van n^3 tot $2n^2$ per pivotage).

De onderstaande schrijfwijze wijkt enigszins af van de hier gebruikte in het bijzonder doordat de links-variabelen boven de matrix worden herhaald, maar dit is de consequentie van de gevolgde methode. Men betitelt de links variabelen als de variabelen in de basis of de basis-

variabelen.

Als basis variabelen zijn hier gekozen alle x-en met een 1 als eerste of tweede index.

		0	x_{31}	x_{21}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
			2	2	1	2	1	1	1	2	3	1	1	2
x_{31}	2	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
x_{21}	2	15	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
x_{11}	1	3	0	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
x_{12}	2	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
x_{13}	1	15	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
x_{14}	1	5	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	ρ	85	2	2	1	2	1	1	3	2	2	3	2	2
	σ		0	0	0	0	0	0	2	0	-1	2	1	0

De opschriften van de diverse kolommen ondergaan bij de nu volgende pivotages geen wijziging. De bovenste rij geeft de variabelen x in een bepaalde volgorde, de daarop volgende geeft de bijbehorende a_{31} , a_{21} enz. De eerste kolom vermeldt de basis-variabelen; deze verandert voortdurend. Elke pivotage betekent een vervanging van een basis-variabele door een niet-basis-variabele. De tweede kolom (2, 3, 1 enz.) geeft weer de bij de basis-variabelen behorende a's.

Met de derde kolom begint de matrix-weergave van de vergelijkingen. De eerste rij van de matrix betekent:

$12 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$, hetgeen overeenkomt met een der gegevens. Evenzo de tweede, vierde, vijfde en zesde.

De derde rij behoeft nog enige toelichting. De daar gegeven vergelijking $3 = x_{11} - x_{22} - x_{23} - x_{24} - x_{32} - x_{33} - x_{34}$ is afgeleid uit

$30 = x_{11} + x_{21} + x_{31}$, waarbij voor x_{31} en x_{21} de uitdrukkingen van de eerste en tweede rij zijn gesubstitueerd.

Wij merken evenwel op dat de matrix-elementen rechts van de tweede dubbele streep ook te berekenen zijn met behulp van de weldra te geven formules.

De getallen van de eerste rij onder de matrix verkrijgen wij door de inwendige producten te berekenen van de betreffende kolom telkens met de tweede kolom vóór de matrix. Bijv. $12 \times 2 + 15 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + 15 \times 1 + 5 \times 1 = 85$. Voorts (eerste matrix kolom):

$$1 \times 2 + 0 \times 2 + \dots = 2; \text{ (10de matrix kolom) } 1 \times 2 + 0 \times 2 + -1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 3.$$

Ten slotte worden de elementen van de tweede rij onder de matrix (de laatste rij) verkregen door aftrekking: de elementen van de eerste rij onder de matrix worden verminderd met de overeenkomstige elementen van de eerste rij boven de matrix.

Deze onderste rij bepaalt tenslotte de keuze van de pivot-kolom: daar waar het grootste positieve getal staat. Bevat deze onderste rij geen positieve getallen meer, dan zijn wij klaar.

De pivot-regels ondergaan door de veranderde schrijfwijze kleine wijzigingen, die alleen betrekking hebben op de pivot-rij en de pivot-kolom. De elementen van de pivot-rij blijven constant; de elementen van de pivot-kolom worden 0 met uitzondering van het pivot-element zelf. Het pivot-element is altijd 1; bij keuze moeten wij het element met het kleinste standaard-quotiënt nemen.

Een en ander toegepast op het onderhavige geval hebben wij wat betreft de pivot-kolom de keuze tussen de zevende en de tiende kolom van de (eigenlijke matrix). Wij kiezen de zevende en hebben dan de keuze tussen de 1 op de tweede rij en de 1 op de vierde rij. Wij moeten de laatste kiezen, omdat $4 \leq 15$.

De clou van Prof. Kosten's publicatie is nu dat wij bij deze pivotage en bij alle volgende kunnen volstaan met de (eenvoudige) berekening van de eerste 6 bij 6 matrix., de referentie matrix (tussen de dubbele lijnen) plus de berekening van de twee rijen onder de matrix.

Er bestaan namelijk betrekkingen tussen de elementen van de referentie matrix en de overige elementen. Deze betrekkingen zien er nogal afschrikwekkend uit en wij geven ze daarom uitsluitend in vereenvoudigde vorm, zoals ze voor ons geval van toepassing zijn.

$$\alpha_{k', (ij)} = \alpha_{k, m-i+1} - \alpha_{km} + \alpha_{k, m+j-1}$$

$$\rho_{(ij)} = \rho_m - i + 1 - \rho_m + \rho_m + j - 1.$$

Hierbij betekent m het aantal rijen van de transport matrix, in ons geval $m = 3$.

De indices van de elementen van de referentie-matrix zijn aangeduid met enkele cijfers. De overige elementen hebben als tweede index een combinatie van 2 cijfers.

Passen wij deze formules bijv. toe voor de berekening van

$$\alpha_{3, (24)} \text{ en } \rho_{(22)}:$$

$$\alpha_{3, 24} = \alpha_{32} - \alpha_{33} + \alpha_{36} = 0 - 1 - 0 = -1.$$

$$\rho_{(22)} = \rho_2 - \rho_3 + \rho_4 = 2 - 1 + 2 = 3.$$

De elementen van de referentie-matrix zijn op de gewone wijze genummerd van α_{11} t/m α_{66} en voorts ook de rijen onder deze matrix:

$$\rho_1 \text{ t/m } \rho_6, \sigma_1 \text{ t/m } \sigma_6.$$

Na bepaling van het eerste pivot-element $\alpha_{4, (22)}$ is nu de gang van zaken als volgt.

Wij bepalen de nieuwe referentiematrix, waarbij inbegrepen kolom 0. Vervolgens berekenen wij met gebruikmaking van de gegeven formule de gehele ρ -rij. Door aftrekking vinden wij de σ rij die onder de referentie-matrix uitsluitend 0 - elementen heeft. Kies uit de overige elementen (rechts) het grootste positieve element; daarmee is de pivot-kolom bepaald. Bereken vervolgens met behulp van de formule alle elementen van deze kolom en kies er het element met kleinste standaard-quotiënt uit. Een en ander toepassend krijgen wij de hier volgende "halve" matrix.

		0	x_{31}	x_{21}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
			2	2	1	2	1	1	1	2	3	1	1	2
x_{31}	2	12	1	0	0	0	0	0						
x_{21}	2	11	0	1	0	-1	0	0						
x_{11}	1	7	0	0	1	1	0	0						
x_{22}	1	4	0	0	0	1	0	0						
x_{13}	1	15	0	0	0	0	1	0						
x_{14}	1	5	0	0	0	0	0	1						
ρ			2	2	1	0	1	1	1	2	2	1	2	2
σ		77	0	0	0	-2	0	0	0	0	-1	0	1	0

De elementen van de pivot-kolom (voorlaatste kolom) worden berekend:

$$\alpha_{1,(33)} = \alpha_{11} - \alpha_{13} + \alpha_{15} = 1; \alpha_{2,(33)} = \alpha_{21} - \alpha_{23} + \alpha_{25} = 0;$$

$$\alpha_{3,(33)} = \alpha_{31} - \alpha_{33} + \alpha_{35} = 1; \alpha_{4,(33)} = \alpha_{41} - \alpha_{43} + \alpha_{45} = 0;$$

$$\alpha_{5,(33)} = \alpha_{51} - \alpha_{53} + \alpha_{55} = 1; \alpha_{6,(33)} = \alpha_{61} - \alpha_{63} + \alpha_{65} = 0.$$

Het nieuwe pivot-element is blijkbaar $\alpha_{1,(33)}$ aangezien $12 < 15$.

Deze procedure herhalend komen wij tot het volgende schema

		0	x_{31}	x_{21}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
			2	2	1	2	1	1	1	2	3	1	1	2
x_{33}	1	12	1	0	0	0	0	0						
x_{21}	2	11	0	1	0	-1	0	0						
x_{11}	1	19	1	0	1	1	0	0						
x_{22}	1	4	0	0	0	1	0	0						
x_{13}	1	3	-1	0	0	0	1	0						
x_{14}	1	5	0	0	0	0	0	1						
ρ			1	2	1	0	1	1	1	2	2	0	1	1
σ		65	-1	0	0	-2	0	0	0	0	-1	-1	0	-1

Aangezien de σ -rij nu geen enkel positief element meer bevat zijn wij klaar.

De minimum transportkosten bedragen 65 en de gevraagde variabelen zijn:

$$x_{33} = 12, x_{21} = 11, x_{11} = 19, x_{22} = 4, x_{13} = 3, x_{14} = 5.$$

De overige x - en zijn 0.

VI. Toepassing op de speltheorie.

Enigszins verrassend doet het wellicht aan dat de pivot-procedure eveneens van toepassing is op eenvoudige vraagstukken van de speltheorie. Een voorbeeld.

A en B spelen een spel, waarbij A de keuze heeft tussen 3 strategieën en B tussen 4 strategieën.

De betalingsmatrix luidt:

		A		
		I	II	III
B	I	2	6	1
	II	4	3	3
	III	5	2	4
	IV	3	6	2

De cijfers geven aan welk bedrag B aan A moet betalen bij een bepaalde keuze van hun strategieën. Bijvoorbeeld: als A I kiest en B I, betaalt B aan A 2 eenheden; als A I kiest en B II, betaalt B 4 eenheden; als A III kiest en B II, dan betaalt B 3 eenheden, enz. (B betaalt steeds). De vraag is nu: hoe moet A zijn strategie kiezen om zijn kans op winst (mathematische verwachting) zo groot mogelijk te maken.

De gevraagde keuze-frequenties noemen wij p_1 , p_2 en p_3 . Derhalve is:

$$0 \leq p_1 \leq 1; 0 \leq p_2 \leq 1; 0 \leq p_3 \leq 1; p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

Als B strategie I kiest (wat A natuurlijk niet weet) dan is blijkens de betalingsmatrix de mathematische verwachting van A:

$$P_1 = 2p_1 + 6p_2 + p_3.$$

Als B strategie II kiest dan krijgen wij:

$$P_2 = 4p_1 + 3p_2 + 2p_3. \text{ Voorts:}$$

$$P_3 = 5p_1 + 2p_2 + 4p_3 \text{ bij keuze van III en } P_4 = 3p_1 + 6p_2 + 2p_3,$$

bij keuze van IV.

Zij P de kleinste waarde van P_1 , P_2 , P_3 en P_4 , dan geldt dus:

$$\begin{cases} 2p_1 + 6p_2 + p_3 \geq P \\ 4p_1 + 3p_2 + 2p_3 \geq P \\ 5p_1 + 2p_2 + 4p_3 \geq P \\ 3p_1 + 6p_2 + 2p_3 \geq P \end{cases}$$

Wij delen links en rechts door P en definiëren

$$x_1 = \frac{p_1}{P}, \quad x_2 = \frac{p_2}{P}, \quad x_3 = \frac{p_3}{P}. \text{ Wij krijgen aldus:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{P} = \frac{1}{P}.$$

De vraag is P zo groot mogelijk te maken, hetgeen neerkomt op het minimaliseren van $z = (x_1 + x_2 + x_3)$.

Wij zouden nu $-z$ kunnen invoeren om er een maximum-probleem van te maken maar het is even eenvoudig het vraagstuk zo te laten en het minimum te zoeken door ernaar te streven dat in de laatste rij geen negatieve elementen overblijven. Daarmee is dit vraagstuk teruggebracht tot een der voorafgaande categoriën.

	x_1	x_2	x_3	1
$y_1 =$	(2)	6	1	-1
$y_2 =$	4	3	3	-1
$y_3 =$	5	2	4	-1
$y_4 =$	3	6	2	-1
$z =$	1	1	1	0

De laatste rij is al in orde (geen negatieve getallen), maar gezien de negatieve elementen in de laatste kolom zou nu de substitutiemethode moeten voorafgaan. Hetzelfde doel (het verdrijven van de - tekens) is echter in dit geval op eenvoudiger wijze te bereiken door een enkele pivotage met het links-boven hokelement als spil.

kele pivotage met het links-boven hokelement als spil.

Dit geeft

	y_1	x_2	x_3	1
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$y_2 =$	2	(-9)	1	1
$y_3 =$	$5/2$	-13	$3/2$	$3/2$
$y_4 =$	$3/2$	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$z =$	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Nu is alles in de laatste kolom positief en wij kunnen derhalve de gewone regels volgen. De tweede kolom is pivot-kolom; de quotiënten zijn achtereenvolgens: $-1/6$, $-1/9$, $-3/26$ en $-1/6$. Het tweede quotiënt is het kleinste en -9 is derhalve de spil.

Pivotage geeft:

	y_1	y_2	x_3	1
$x_1 =$	$-1/6$	$1/3$	$-5/6$	$1/6$
$x_2 =$	$2/9$	$-1/9$	$1/9$	$1/9$
$y_3 =$	$-7/18$	$13/9$	$1/18$	$1/18$
$y_4 =$	$5/6$	$1/3$	$1/6$	$1/6$
$z =$	$1/18$	$2/9$	$5/18$	$5/18$

Het vraagstuk is opgelost; de minimale $z = 5/18$, d.w.z. de minimale winst $P = 18/5$ wordt behaald voor $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/9$, $x_3 = 0$.

Hieruit volgt $p_1 = 3/5$; $p_2 = 2/5$. Van elke 5 keren moet A dus 3 maal strategie I kiezen, 2 maal strategie II en geen enkele maal strategie III. Zijn mathematische verwachting is dan $18/5$.

Bekijken wij thans dit probleem van de kant van B. Voor hem is het zaak zijn verlies zo klein mogelijk te houden.

B hanteert q_1 maal strategie I, q_2 maal strategie II en q_3 maal III, q_4 maal IV.

Q_1 (het te verwachten verlies als A I kiest) =

$$2q_1 + 4q_2 + 5q_3 + 3q_4. \text{ Voorts:}$$

$$Q_2 = 6q_1 + 3q_2 + 2q_3 + 6q_4$$

$$Q_3 = q_1 + 3q_2 + 4q_3 + 2q_4.$$

Q is de grootste van de $3Q$'s en deze Q moet zo klein mogelijk blijven.

Wij definiëren weer:

$$y_1 = \frac{q_1}{Q}, \quad y_2 = \frac{q_2}{Q}, \quad y_3 = \frac{q_3}{Q}, \quad y_4 = \frac{q_4}{Q}$$

en krijgen:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ 6y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 6y_4 \leq 1 \\ y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{Q} = y_1 + y_2 + y_3 + y_4; \quad z \text{ moet maximaal worden.}$$

Wij schrijven de matrix in getransponeerde vorm (zie onder I).

	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$z =$
$-y_1$	2	6	1	-1
$-y_2$	4	3	3	-1
$-y_3$	5	2	4	-1
$-y_4$	3	6	2	-1
1	1	1	1	0

Deze matrix is dezelfde als de voorgaande. Volgens het dualiteitsprincipe is (met verandering van minimum in maximum) ook de uitkomst dezelfde m.a.w. de minimale $Q = 18/5$. Deze wordt bereikt voor:

$$y_1 = 1/18, \quad y_2 = 2/9, \quad y_3 = y_4 = 0.$$

Hieruit volgt: $q_1 = 1/5, \quad q_2 = 4/5, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = 0$.

Van elke 5 keer moet B eenmaal strategie I kiezen, viermaal strategie II en geen enkele maal strategie III en IV. B's beste strategie sluit aan bij A's beste strategie; beider mathematische verwachting = $18/5$.

Deze conclusie stelt ons in staat van dit spel een "eerlijk" spel te maken door alle elementen van de betaalmatrix met $18/5$ te verminderen. Deze matrix wordt dan:

		A		
		I	II	III
B	I	-1,6	2,4	-2,6
	II	0,4	-0,6	-0,6
	III	1,4	-1,6	0,4
	IV	-0,6	2,4	-1,6

In de nieuwe vorm hebben A en B evenveel kans op winst en verlies. Hun mathematische verwachting = 0.